О векторных аналогах цепочки Вольтерра

В.Э. Адлер, В.В. Постников
23 мая 2008, ИТФ им. Ландау

- классификация, в рамках симметрийного подхода, интегрируемых изотропных цепочек типа Вольтерра на сфере
- симплектическая структура полученных цепочек и ассоциированные уравнения типа НУШ
- примеры полиномиальных цепочек типа Вольтерра и Богоявленского

[1] V.E. Adler. Classification of integrable Volterra type lattices on the sphere. Isotropic case. *J. Phys. A* (2008) 145201.

[2] В.Э. Адлер, В.В. Постников. Полиномиальные цепочки типа Вольтерра и Богоявленского.

1 Введение

Скалярный случай. Цепочка Вольтерра

$$v_{n,x} = v_n(v_{n+1} - v_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

— интегрируемая система: представление Лакса, точные решения, высшие законы сохранения, **высшие симметрии**. Следующий поток:

$$v_{n,t} = v_n(v_{n+1}(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) - v_{n-1}(v_n + v_{n-1} + v_{n-2})).$$

---

[3] V. Volterra. Lecons sur la theorie mathematique de la luttre pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1931.

[4] В.Е. Захаров, С.Л. Мушер, А.М. Рубенчик. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме. *Письма в ЖЭТФ* ***19:5*** (1974) 249–253.

[5] С.В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. *ЖЭТФ* ***40*** (1974) 269–274.

Симметрийный подход. Общий вид цепочек:

$$v_{n,x} = f(v_{n+1}, v_n, v_{n-1}).$$

Интегрируемость: совместность с иерархией высших симметрий

$$v_{n,t_k} = g^{(k)}(v_{n+k}, \dots, v_{n-k})$$

$\Rightarrow$ ограничения на f $\Rightarrow$ полный список интегрируемых цепочек

[6] Р.И. Ямилов. Классификация дискретных эволюционных уравнений. *УМН* ***38:6*** (1983) 155–156.

[7] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C/ Math. Phys. Rev.* ***4*** (1984) 221–280.

[8] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surv.* ***42:4*** (1987) 1–63.

[9] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003.

Векторный случай. Общий вид цепочек

$$V_{n,x} = f_n V_{n+1} + g_n V_n + h_n V_{n-1}, \tag{1}$$

V_n — векторы произвольной размерности, коэффициенты — скаляры, зависящие от V_{n+1}, V_n, V_{n-1}.

Интегрируемость: иерархия высших симметрий

$$V_{n,t_k} = p_n^{(k,k)} V_{n+k} + \cdots + p_n^{(k,0)} V_n + \cdots + p_n^{(k,-k)} V_{n-k}. \tag{2}$$

Дополнительные предположения

- изотропность: все коэффициенты зависят только от скалярных произведений

$$v_{n+i,n+j} = \langle V_{n+i}, V_{n+j} \rangle = \langle V_{n+j}, V_{n+i} \rangle;$$

- инвариантность относительно сдвига $T : n \to n+1$, в каждом узле уравнения одни и те же;
- редукция на сферу $|V| = 1$

$$g = -v_{1,0} f - v_{0,-1} h, \quad f = f(v_{1,-1}, v_{1,0}, v_{0,-1}), \quad h = h(v_{1,-1}, v_{1,0}, v_{0,-1}),$$

- либо полиномиальные коэффициенты.

Непрерывный случай: аналогичные исследования для векторных уравнений типа КдФ и НУШ.

[10] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Comm. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

[11] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Classification of integrable divergent N-component evolution systems. *Theor. Math. Phys.* ***139:2*** (2004) 609–622.

[12] V.V. Sokolov, T. Wolf. Classification of integrable polynomial vector evolution equations. *J. Phys. A* ***34*** (2001) 11139–11148.

[13] T. Tsuchida, T. Wolf. Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations. I. *J. Phys. A* ***38*** (2005) 7691–7733.

2 Необходимые условия интегрируемости

Условие совместности (1) и (2):

$$D_x(P^{(k)}) - D_{t_k}(F) = [F, P]$$

где F, P ***скалярные*** операторы

$$F = fT + g + hT^{-1}, \quad P^{(k)} = p^{(k,k)}T^k + \cdots + p^{(k,-k)}T^{-k}.$$

Интегрируемость $=$ бесконечный набор высших симметрий
$\Rightarrow$ формальная симметрия
$\Rightarrow$ последовательность канонических законов сохранения

Утверждение 1. Если цепочка (1) обладает бесконечной иерархией высших симметрий, то уравнения

$$L_x = [F, L], \qquad L = a^{(-1)}T + a^{(0)} + a^{(1)}T^{-1} + a^{(2)}T^{-2} \ldots$$
$$\tilde{L}_x = [F, \tilde{L}], \qquad \tilde{L} = \tilde{a}^{(-1)}T^{-1} + \tilde{a}^{(0)} + \tilde{a}^{(1)}T + \tilde{a}^{(2)}T^2 \ldots$$

разрешимы относительно коэффициентов $a^{(j)}$, $\tilde{a}^{(j)}$, локально зависящих от $v_{m,n}$.

Уравнения на $a^{(j)}$, $\tilde{a}^{(j)}$ можно переписать в виде законов сохранения

$$D_x(\rho^{(j)}) = (T-1)(\sigma^{(j)}), \quad D_x(\tilde{\rho}^{(j)}) = (T^{-1}-1)(\tilde{\sigma}^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Плотность $\rho^{(j)}$ определяется, как свободный член ряда L^j. Условия разрешимости в виде локальных функций дают последовательность препятствий к интегрируемости в форме законов сохранения (возможно, тривиальных). Полезна формула

$$\mathrm{Im}(T-1) = \bigcap_{s=1}^{\infty} \ker \frac{\delta}{\delta v_{0,s}}.$$

Утверждение 2. Если цепочка (1) интегрируема, то уравнения (3) разрешимы для следующей последовательности плотностей $\rho^{(j)}$, $\tilde{\rho}^{(j)}$:

$$\rho^{(0)} = \log f, \qquad \tilde{\rho}^{(0)} = \log h, \tag{4}$$

$$\rho^{(1)} = g + \sigma^{(0)}, \qquad \tilde{\rho}^{(1)} = g + \tilde{\sigma}^{(0)}, \tag{5}$$

$$\rho^{(2)} = hf_{-1} + \frac{1}{2}(\rho^{(1)})^2 + \sigma^{(1)}, \qquad \tilde{\rho}^{(2)} = fh_1 + \frac{1}{2}(\tilde{\rho}^{(1)})^2 + \tilde{\sigma}^{(1)}. \tag{6}$$

[14] R.I. Yamilov. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations. *J. Phys. A* ***39*** (2006) R541–623.

[15] D. Levi, R.I. Yamilov. Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice. *J. Math. Phys.* ***38*** (1997) 6648–6674.

3 Первый шаг

Рассмотрим первую пару условий интегрируемости (3), (4)

$$D_x(\log f) \in \mathrm{Im}(T-1), \quad D_x(\log h) \in \mathrm{Im}(T-1).$$

Члены, содержащие $v_{k,k-3}$ возникают только при дифференцировании $v_{1,-1}$:

$$D_x(\log f) = \frac{f_{v_{1,-1}}}{f} D_x(v_{1,-1}) + \dots = \frac{f_{v_{1,-1}}}{f}(f_1 v_{2,-1} + h_{-1} v_{1,-2}) + \dots$$
$$\overset{\mathrm{Im}(T-1)}{\simeq} \left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f} f_1 + T\left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f}\right) h \right) v_{2,-1} + \dots$$

и аналогично для $D_x(\log h)$. Получаем условия

$$\frac{f_{v_{1,-1}}}{f^2} + \frac{h}{f} T\left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f^2}\right) = 0, \quad \frac{h_{v_{1,-1}}}{h^2} + \frac{f}{h} T^{-1}\left(\frac{h_{v_{1,-1}}}{h^2}\right) = 0.$$

Отсюда уточняется зависимость правой части от $v_{1,-1}$.

Утверждение 3. Коэффициенты цепочки могут иметь следующий вид:

I. $$f = \frac{a(v_{0,-1})}{v_{1,-1} + b(v_{1,0}, v_{0,-1})}, \quad h = -\frac{a(v_{1,0})}{v_{1,-1} + b(v_{1,0}, v_{0,-1})},$$

II. $$f = f(v_{1,0}, v_{0,-1}), \quad h = h(v_{1,0}, v_{0,-1}).$$

4 Дальнейшие вычисления

В случае I дальнейший анализ условий (3), (4) позволяет определить функции a, b с точностью до нескольких констант, которые фиксируются следующим условием интегрируемости с плотностями (5)

$$\rho^{(1)} = g + \sigma^{(0)}, \qquad \tilde\rho^{(1)} = g + \tilde\sigma^{(0)}.$$

В случае II вычисления проще, но длиннее, и приходится использовать также третье условие с плотностями (6)

$$\rho^{(2)} = hf_{-1} + \frac{1}{2}(\rho^{(1)})^2 + \sigma^{(1)}, \qquad \tilde\rho^{(2)} = fh_1 + \frac{1}{2}(\tilde\rho^{(1)})^2 + \tilde\sigma^{(1)}.$$

Непосредственно проверяется, что найденные цепочки действительно допускают высшую симметрию 2-го порядка

$$\begin{aligned} V_t = ff_1(V_2 - v_{2,0}V) + f(\rho_1^{(1)} + \rho^{(1)})(V_1 - v_{1,0}V) \\ - h(\tilde\rho_{-1}^{(1)} + \tilde\rho^{(1)})(V_{-1} - v_{0,-1}V) - hh_{-1}(V_{-2} - v_{0,-2}V). \end{aligned} \tag{7}$$

5 Список интегрируемых цепочек

$$V_x = \frac{a(V_1 - v_{1,0}V) + a_1(v_{0,-1}V - V_{-1})}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1}}, \quad a = v_{0,-1} - \frac{1}{v_{0,-1}}; \tag{V_1}$$

$$V_x = \frac{a(V_1 - v_{1,0}V) + a_1(v_{0,-1}V - V_{-1})}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1} + aa_1}, \quad a^2 - 2kv_{0,-1}a + v_{0,-1}^2 - 1 = 0; \tag{V_2}$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} - 1}; \tag{V_3}$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1} + (v_{1,0} + \varepsilon)(v_{0,-1} + \varepsilon)(k + pp_1)}, \quad p = \sqrt{\frac{v_{0,-1} - \varepsilon}{v_{0,-1} + \varepsilon} - k}; \tag{V_4}$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} + \varepsilon(v_{1,0} + v_{0,-1}) + 1 + k\sqrt{v_{1,0} + \varepsilon}\sqrt{v_{0,-1} + \varepsilon}}, \quad k = 0, \pm 2; \tag{V_5}$$

$$V_x = \frac{V_1 + \delta V}{v_{1,0} + \delta} - \frac{V_{-1} + \delta V}{v_{0,-1} + \delta}, \quad \delta = 0, \pm 1. \tag{V_6}$$

$$\langle V, V\rangle = 1, \ \ v_{m,n} = \langle V_m, V_n\rangle, \ \ \varepsilon = \pm 1.$$

Замечания

- Знаки ε, δ уничтожимы заменой $V_n \to (-1)^n V_n$.
- Цепочка (V_2) при $k = \pm 1$ совпадает с (V_5) при $k = 0$.
- (V_6) = дискретная спиновая цепочка Гейзенберга [16], см. также [17] (приложения к дискретной геометрии).
- остальные цепочки, повидимому, являются новыми.

[16] O. Ragnisco, P.M. Santini. A unified algebraic approach to integral and discrete evolution equations. *Inverse Problems* ***6*** (1990) 441–452.

[17] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Comm. Math. Phys.* ***204*** (1999) 147–188.

6 Гамильтонова структура (?)

Все цепочки из списка обладают пред-симплектической структурой

$$SV_x = \frac{\delta H}{\delta V} + \lambda V, \quad H = \rho^{(0)} = \log f(v_{1,-1}, v_{1,0}, v_{0,-1})$$

где λ — множитель Лагранжа, $S = -S^\top$ оператор вида

$$S = pT^{-1} - p_1 T - qV_{-1}V^\top T^{-1} + q_1 V_1 V^\top T + r(V_1 V_{-1}^\top - V_{-1}V_1^\top).$$

Формула $\langle U, SW\rangle = \Omega(U, W)$ связывает S с 2-формой

$$\Omega = \sum_n \Big(p_n\langle dV_n \underset{,}{\wedge} dV_{n-1}\rangle + q_n\langle V_n, dV_{n-1}\rangle \wedge \langle V_{n-1}, dV_n\rangle + r_n\langle V_{n+1}, dV_n\rangle \wedge \langle V_{n-1}, dV_n\rangle\Big)$$

где $\langle \alpha \underset{,}{\wedge} \beta\rangle(U, W) = \langle \alpha(U), \beta(W)\rangle - \langle \alpha(W), \beta(U)\rangle$.

Пример. Цепочка (V_3):

$$p = \frac{1}{v_{0,-1} + \varepsilon}, \quad q = \frac{1}{(v_{0,-1} + \varepsilon)^2}, \quad r = 0, \qquad \Omega = d\sum_n p_n\langle V_n, dV_{n-1}\rangle.$$

Однако для большинства цепочек $d\Omega \neq 0$, то есть оператор S не симплектический.

7 Ассоциированные системы

• Исключение сдвигов. Исходную цепочку (1) можно переписать в виде рекуррентных соотношений

$$V_{n-1}=\tilde{f}_nV_{n+1}+\tilde{g}_nV_n+\tilde{h}_nV_{n,x},\qquad V_{n+2}=\hat{f}_nV_{n+1,x}+\hat{g}_nV_{n+1}+\hat{h}_nV_n \tag{8}$$

с коэффициентами зависящими от скалярных произведений $V_{n+1},V_n,V_{n+1,x},V_{n,x}$. Чтобы получить первую формулу, нужно избавиться от $v_{n+1,n-1}$, $v_{n,n-1}$ при помощи уравнений

$$\begin{aligned}\langle V_{n,x},V_{n+1}\rangle&=(1-v^2_{n+1,n})f_n+(v_{n+1,n-1}-v_{n+1,n}v_{n,n-1})h_n,\\ \langle V_{n,x},V_{n,x}\rangle&=(1-v^2_{n+1,n})f^2_n+2(v_{n+1,n-1}-v_{n+1,n}v_{n,n-1})f_nh_n+(1-v^2_{n,n-1})h^2_n.\end{aligned}$$

[18] D. Levi. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* ***14:5*** (1981) 1083–1098.

[19] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Lattice representations of integrable systems. *Phys. Lett. A* ***130:4,5*** (1988) 271–275.

[20] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

- Все V_n можно выразить через

$$U = V_1, \quad V = V_0$$

и их производные. В частности, симметрия (7) записывается как система вида

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + \alpha U_x + \beta V_x + \gamma U + \delta V, \\ -V_t = V_{xx} + \tilde{\alpha} U_x + \tilde{\beta} V_x + \tilde{\gamma} U + \tilde{\delta} V, \end{cases} \qquad \langle U, U \rangle = \langle V, V \rangle = 1.$$

Формулы (8) определяют для неё явное авто-преобразование Бэклунда.

- Кроме того, скаляры $\langle U, V \rangle$ подчиняются некоторой 1+2-мерной системе.

[21] S.V. Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *JETP* ***38:2*** (1974) 248–253.

[22] S.I. Svinolupov. Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs. *Comm. Math. Phys.* ***143*** (1992) 559–575.

[23] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Vector-matrix generalizations of classical integrable equations. *Theor. Math. Phys.* ***100*** (1994) 959–962.

Пример. Цепочка (V_3) при $\varepsilon = 1$ ассоциирована с системой

$$U_t = U_{xx} - 2\left(\frac{\langle U, V_x\rangle\langle U_x, V\rangle}{(\langle U, V\rangle + 1)^2} - \frac{\langle U_x, V_x - V\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\right) U_x - \frac{\langle U_x, U_x\rangle}{\langle U, V\rangle + 1} V_x$$
$$+ \frac{\langle U_x, U_x\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\left(1 + \frac{\langle U, V_x\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\right)(U + V),$$

$$-V_t = V_{xx} + 2\left(\frac{\langle U, V_x\rangle\langle U_x, V\rangle}{(\langle U, V\rangle + 1)^2} - \frac{\langle V_x, U_x + U\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\right) V_x + \frac{\langle V_x, V_x\rangle}{\langle U, V\rangle + 1} U_x$$
$$+ \frac{\langle V_x, V_x\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\left(1 - \frac{\langle U_x, V\rangle}{\langle U, V\rangle + 1}\right)(U + V).$$

Преобразование Бэклунда:

$$\tilde{U} = V, \qquad \tilde{V} = -V + \frac{\langle V_x, V_x\rangle(U + V) + 2(1 + \langle U, V\rangle)V_x}{\langle V_x + 2U + 2V, V_x + V\rangle}.$$

8 Открытые вопросы

- Анизотропные цепочки. Известен только один пример:

$$(V_6) \quad \to \quad V_x = \langle V, JV\rangle \left(\frac{V_1+V}{v_{1,0}+1} - \frac{V_{-1}+V}{v_{0,-1}+1}\right),$$

он сводится к цепочке Склянина [26]. Стационарные цепочки: [24, 25].

- Классификация без редукции на сферу сложнее. Уравнения на конусе $|V|=1$.
- Полиномиальный случай $\Rightarrow$ следующий раздел.
- Пертурбативный подход [27].

[24] Я.И. Грановский, А.С. Жеданов. Решения доменного типа в анизотропных магнитных цепочках. *ТМФ* ***71:1*** (1987) 143–153.

[25] А.П. Веселов. Интегрирование стационарной задачи для классической спиновой цепочки. *ТМФ* ***71:1*** (1987) 154–159.

[26] В.Э. Адлер. О дискретизациях уравнения Ландау-Лифшица. *ТМФ* ***124:1*** (2000) 897–908.

[27] A.V. Mikhailov, V.S. Novikov. Perturbative symmetry approach. *J. Phys. A* ***35*** (2002) 4775–4790.

9 Полиномиальные цепочки

Даже в скалярном случае нет полного описания длинных цепочек, то есть типа цепочки Богоявленского

$$v_{n,x} = v_n\big(v_{n+k} + \dots + v_{n+1} - v_{n-1} - \dots - v_{n-k}\big). \tag{9}$$

Компьютерный поиск при небольших k (<5) приводит к гипотезе, что все полиномиальные интегрируемые цепочки сводятся к (9) или её симметриям, с точностью до преобразований типа Миуры.

Пример. Замена $v_n = u_{n+k-1} \cdots u_{n+1} u_n$ приводит к цепочке

$$u_{n,x} = u_n\big(u_{n+k} \cdots u_{n+1} - u_{n-1} \cdots u_{n-k}\big).$$

В векторном случае картина сложнее.

---

[28] K. Narita. Soliton solution to extended Volterra equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***51:5*** (1982) 1682–1685.

[29] О.И. Богоявленский. Алгебраические конструкции интегрируемых динамических систем — расширений системы Вольтерра. *УМН* ***46:3*** (1991) 3–48.

- **две векторных версии скалярной цепочки.** При $k=1$ имеется всего две интегрируемые полиномиальные векторные цепочки:

$$V_{n,x} = \langle V_n, V_n\rangle(V_{n+1} - V_{n-1}) - 2\langle V_{n+1} - V_{n-1}, V_n\rangle V_n, \tag{10}$$

$$V_{n,x} = (\langle V_n, V_n\rangle + a)(V_{n+1} - V_{n-1}), \quad a = \mathrm{const}\,. \tag{11}$$

Первая изучалась в [30] и тесно связана с цепочкой (V_6). Вторая, по-видимому, новая. В скалярном пределе обе переходят в

$$v_{n,x} = (v_n^2 + a)(v_{n+1} - v_{n-1}).$$

Ассоциированные системы — типа НУШ с производной ($U = V_{n+1}$, $V = V_n$, ср. [12]):

$$(10) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} U_t = U_{xx} + 2(2\langle U, V\rangle U - \langle U, U\rangle V)_x, \\ V_t = -V_{xx} + 2(2\langle U, V\rangle V - \langle V, V\rangle U)_x, \end{cases}$$

$$(11) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} U_t = U_{xx} + 4\langle U, V\rangle U_x + 2(\langle U, U\rangle + a)V_x, \\ V_t = -V_{xx} + 4\langle U, V\rangle V_x + 2(\langle V, V\rangle + a)U_x. \end{cases}$$

---

[30] V.E. Adler, S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. Multi-component Volterra and Toda type integrable equations. *Phys. Lett. A* ***254*** (1999) 24–36.

- **векторная версия приводимой скалярной цепочки.** При $k=2$ найдено несколько примеров.

$$V_{n,x} = \langle V_{n+1}, V_n\rangle\langle V_n, V_{n-1}\rangle(V_{n+2} - V_{n-2}).$$

Ассоциированная система пишется на V_0, V_1, V_2, V_3.

В скалярном пределе имеем цепочку

$$v_{n,x} = v_{n+1}v_n^2 v_{n-1}\big(v_{n+2} - v_{n-2}\big).$$

Замена $u_n = v_{n+2}v_{n+1}v_n v_{n-1}$ сводит её к “раздвинутой” цепочке Вольтерра

$$u_{n,x} = u_n\big(u_{n+2} - u_{n-2}\big),$$

то есть уравнения для чётных и нечётных узлов разделяются.